

1. (20%) 求出下列微分方程式的通解。

(a) $(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$ (b) $y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x}$

2. (20%) Solve the IVPs (initial value problems) by the Laplace transform

$$y'' + 7y' + 12y = 21e^{3t}, \quad y(0) = 3.5, \quad y'(0) = -10$$

設 $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ 則 (a) $Y(s) = ?$ (b) $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = ?$

3. (20%) 函數 $f(x) = x^2, 0 \leq x < 2\pi,$

(a) 展開成 Fourier 級數 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ ，週期為 2π 。

(b) 由(a)之結果，證明 $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$ (提示: $f(x)|_{x=0} = \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2}$)

4. (10%) 寫出下列線性方程式解的參數形式(parametric form)。

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 1 \\ x - 6y + z = 2 \\ -x - 3y - z = 1 \end{cases}$$

5. (10%) 求出下列矩陣的反矩陣(inverse matrix)與行列式(determinant)。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

6. (10%) 求出下列向量場的散度(divergence)與旋度(curl)。

$$\vec{A} = (x^2 - y^2)\hat{a}_x + (x^2 - z^2)\hat{a}_y + (y^2 - z^2)\hat{a}_z$$

7. (10%) 求出純量場 $V = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy$ 在點(1,2,1)的梯度(gradient)與沿著向量

$\frac{1}{3}\hat{a}_x + \frac{2}{3}\hat{a}_y + \frac{2}{3}\hat{a}_z$ 的方向導數。

「試題結束」